

## ***Propuestas para la enseñanza de la matemática***

### ***NIVELES DE RAZONAMIENTO FRENTE A PROBLEMAS BINOMIALES***

***Álvaro Toledo San Martín***

Universidad Bernardo O'Higgins. Chile  
alvaro.toledo@ubo.cl

#### **Resumen**

Este trabajo es un extracto de un estudio donde se exploran los tipos de razonamientos que tienen profesores de enseñanza media de establecimientos educacionales chilenos frente a problemas de probabilidad. Se presentan resultados del análisis de las respuestas de 27 profesores respecto a dos problemas de distribución binomial (con y sin equiprobabilidad). Para el análisis, se utiliza una jerarquización hipotética basada en la taxonomía SOLO considerando los elementos necesarios para la resolución de problemas binomiales. Dentro de las conclusiones la definición clásica de probabilidad, el uso de diagramas de árbol, la regla del producto, la combinatoria y la fórmula de la distribución binomial son indicadores de transición entre niveles de razonamiento.

#### **Introducción**

Dentro de la bases curriculares definidas por el Ministerio de Educación de Chile el tópico de variable aleatoria discreta está considerado dentro del eje de Datos y Azar para alumnos desde 2do Medio (MINEDUC, 2013). Específicamente, se destaca el concepto de distribución Binomial como modelo de probabilidad discreto, estableciendo explícitamente la necesidad de la construcción inicial del concepto en base a tablas de frecuencias asociadas a experimentos aleatorios de este tipo (lanzamiento de una moneda equilibrada, extracción de esferas de una urna, etc.), luego, resolución de problemas en base a la distribución Binomial (su fórmula) y la profundización respecto al valor esperado y varianza. Estudios del área muestran las dificultades que presentan alumnos en entender estos conceptos en la mayoría de los casos debido a sesgos cognitivos, por ejemplo, en Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens y Verschaffel (2003) se estudia la presencia del sesgo de linealidad en alumnos de Bachillerato, los cuales, a pesar de haber cursado formalmente asignaturas de probabilidad caen en este tipo de sesgo en problemas binomiales cuyos enunciados aparentan ser proporcionales. Fischbein y Schnarch (1997) también destacan la ilusión de linealidad, además de la suposición de equiprobabilidad, representatividad, disponibilidad, entre otras, al igual que en Batanero y Sánchez (2005). Estudios comparativos entre alumnos de bachillerato y profesores de secundaria en formación se observan en Mayén, Salazar y Sánchez (2013) en donde la conclusión principal indica que es fundamental el conocimiento de la combinatoria y la regla del producto para la solución de problemas binomiales.

La pregunta de esta investigación se centra en determinar si estos tipos de sesgos de razonamiento observados en los estudios mencionados anteriormente se dan en profesores

de enseñanza media (secundaria) chilenos. Para ello, se explorará el pensamiento de los profesores frente a problemas binomiales (problema con y sin equiprobabilidad) y se determinará los elementos de conocimiento que utilizan para resolverlos presentando un cuadro donde se resuma la gama de razonamientos en los distintos niveles propuestos.

A continuación se presentan antecedentes sobre la taxonomía SOLO para jerarquizar y obtener niveles de razonamiento, el marco conceptual, la metodología de estudio y las conclusiones obtenidas.

### **Antecedentes**

La taxonomía SOLO (“Structure of Observed Learning Outcome”) se ha utilizado en la mayoría de los estudios de jerarquización resultantes del análisis o evaluación de la comprensión de conceptos estadísticos o probabilísticos. En Landín y Sánchez (2010), se propone una jerarquización hipotética basada en este método en niveles de razonamiento frente a problemas binomiales en estudiantes de Bachillerato. En Sánchez y Landín (2011) se describe un proceso para mejorar la fiabilidad de la jerarquía de razonamiento frente a problemas binomiales, la cual, es aplicada nuevamente en estudiantes de Bachillerato en Landín (2013).

### **Marco conceptual**

El razonamiento de estudiantes frente a una tarea refleja la comprensión conceptual que han alcanzado y se expresa en el uso de elementos de conocimiento relacionados con la tarea y con el (o los) concepto (s) en cuestión (Mayén et al, 2013).

La taxonomía SOLO presentada por Biggs y Collis (1982) se utilizó para definir una jerarquía que describa los tipos de razonamiento sobre la probabilidad Binomial y el análisis de las respuestas del cuestionario asociado. Siguiendo a Biggs y Collis (1991) se definen cinco niveles de abstracción o modos de funcionamiento que pueden ser distinguidos para describir el desarrollo de un individuo: sensoriomotor, icónico, simbólico-concreto, formal y post-formal. Dentro de cada modo, las respuestas llegan a ser crecientemente complejas y este crecimiento puede ser descrito en términos de niveles; los niveles de SOLO son: uniestructural (U) cuando la respuesta incluye sólo un componente relevante del concepto o tarea, multiestructural (M) cuando incluye dos o más componentes no relacionados o con relaciones espurias y relacional (R) cuando incluye muchos componentes con relaciones genuinas entre ellas. Existe un nivel adicional denominado preestructural (P) que precede al uniestructural y otro denominado abstracto extendido (A) posterior al relacional.

En este estudio se consideró una jerarquización hipotética basada en la taxonomía SOLO considerando los distintos tipos de razonamientos observados en las respuestas de los profesores a las preguntas sobre distribución binomial.

### **Metodología**

Participaron en el estudio 27 profesores de matemáticas de Educación Media de distintos colegios de la Región Metropolitana en la ciudad de Santiago de Chile.

El instrumento utilizado corresponde a los problemas 10 y 11 de un cuestionario de 11 problemas de probabilidad, ambos ejercicios están asociados a la aplicación de la distribución Binomial. El problema 10 es un caso equiprobable y el problema 11 es no equiprobable. Ambos problemas corresponden a una aplicación directa de la fórmula de la distribución Binomial:  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . En el problema 10 los valores de los parámetros de la distribución son respectivamente  $n=5$  y  $p=1/2$  (caso equiprobable) y en el problema 11 los valores son  $n=3$  y  $p=5/8$  (caso no equiprobable). A continuación se presentan los problemas:

10. Se lanza una moneda honesta en 5 oportunidades. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?.

11. Una urna contiene 5 esferas azules y 3 esferas rojas, suponga que se extraen 3 esferas con reposición. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos esferas azules?.

Los problemas se aplicaron a los profesores en presencia de los jefes de UTP y el investigador. El proceso de análisis de las respuestas es de tipo cualitativo y cíclico; consiste en una revisión sistemática de todas las respuestas para formar un sistema de categorías hasta clasificarlas en los diferentes niveles jerárquicos de la taxonomía SOLO (*preestructural, uniestructural, multiestructural, relacional y abstracto extendido*) esto en función de los elementos de conocimiento que se exponen y de la precisión en su presentación, se considera en particular, la definición clásica de probabilidad, el uso de diagramas de árbol, la regla del producto, la combinatoria y la fórmula de la distribución binomial. Se obtuvo jerarquías de cada problema, en la que se incluyen subcategorías para cada nivel de razonamiento.

### Resultados

A continuación se presentan los resultados del análisis de las respuesta de los problemas de probabilidad binomial en los casos equiprobable y no equiprobable mediante una tabla de jerarquía derivada de la revisión sistemática de los cuestionarios, se incluye además ejemplos para uno de los niveles observados y una tabla de frecuencias donde se presentan la frecuencias y porcentajes de respuesta en cada uno de los niveles.

#### Resultados del análisis del problema 10 (caso equiprobable)

Los resultados por categoría de este problema se presentan en la Tabla 1 que incluye el nivel jerárquico de la taxonomía SOLO y las subcategorías que lo forman, así como la descripción de la respuesta típica escrita acerca de elementos de conocimiento encontrados.


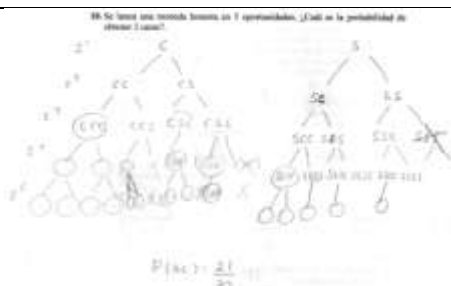
## **Propuestas para la enseñanza de la matemática**

Tabla 1. Jerarquía obtenida de la pregunta 10.


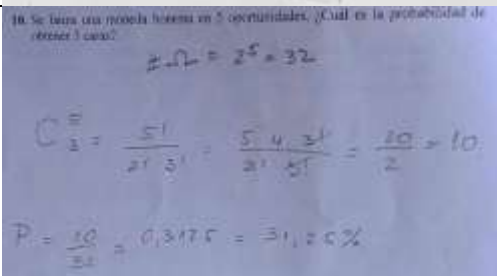
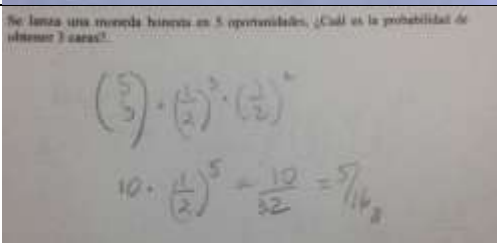
Niveles SOLO y Subcategorías	Descripción de respuestas típicas
Preestructural P1	Respuestas no relacionada con la situación o con errores conceptuales.
Uniestructural U1 U2	Realiza un diagrama de árbol inadecuado o incompleto. Realiza un diagrama de árbol completo, cuenta casos favorable desde el árbol y calcula probabilidad pedida.
Relacional R1 R2	Utiliza combinatoria, la regla de Laplace o técnicas de conteo para determinar la probabilidad. Utiliza la fórmula Binomial pero no identifica la distribución, no define variable aleatoria ni utiliza notación de probabilidad.

Se presentan en la tabla 2 ejemplos de respuestas para cada uno de los niveles observados en la Tabla 1.

Tabla 2. Ejemplos de respuestas para la pregunta 10.

Subcategorías	Respuesta	Descripción
P1	<p>Se lanza una moneda honesta en 5 oportunidades. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?</p> 	Respuesta no relacionada con la situación.
U1		Dibuja diagramas de árbol inadecuados, luego determina de forma incorrecta los casos favorables, aunque obtiene de forma correcta los casos totales.

## Propuestas para la enseñanza de la matemática

U2		Realiza un diagrama de árbol del cual extrae una lista completa de los casos posibles y obtiene correctamente el número de casos favorables. Determina la probabilidad mediante Laplace.
R1		Obtiene el número de casos totales mediante regla de conteo. Calcula el número de casos favorables mediante combinatoria, luego obtiene la probabilidad pedida mediante Laplace.
R2		Utiliza la fórmula binomial, pero no se evidencia definición de la variable aleatoria del problema, ni la identificación de los parámetros de la distribución, tampoco se observa uso formal de notación de probabilidad.

A continuación se presentan la tabla de frecuencias para las respuestas observadas en el estudio para cada nivel descrito en la Tabla 1.

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de respuestas por nivel de razonamiento

		Profesores (n=27)	
		Frec.	%
Preestructural	P1: Respuestas no relacionadas con la situación	3	11,11%
Uniestructural	U1: Realiza un diagrama de árbol inadecuado o incompleto.	2	7,41%
	U2: Realiza un diagrama de árbol completo, cuenta casos favorable desde el árbol y calcula la probabilidad pedida.	14	51,85%

## **Propuestas para la enseñanza de la matemática**

Relacional	R1: Utiliza combinatoria, la regla de Laplace o técnicas de conteo para determinar la probabilidad.	5	18,52%
	R2: Utiliza la fórmula Binomial pero, no identifica la distribución, no define variable aleatoria ni utiliza notación de probabilidad.	3	11,11%

### **Resultados del análisis del problema 11 (caso no equiprobable)**

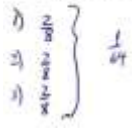
Los resultados por categoría de este problema se presentan en la Tabla 4 que incluye el nivel jerárquico de la taxonomía SOLO y las subcategorías que lo forman, así como la descripción de la respuesta típica escrita acerca de elementos de conocimiento encontrados.

Tabla 4. Jerarquía obtenida de la pregunta 11.

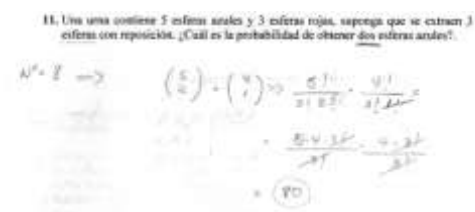
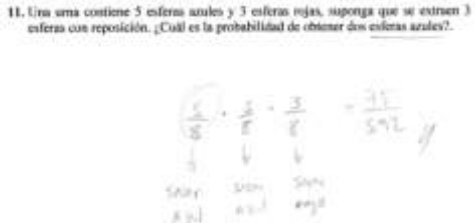
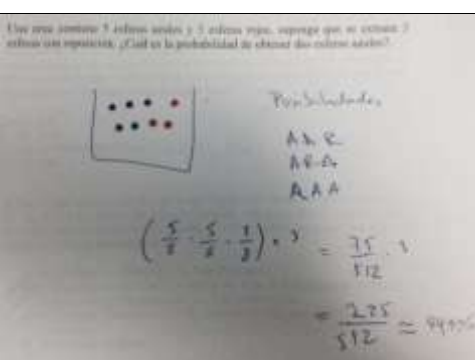
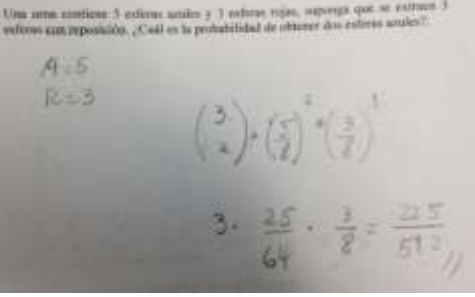
Niveles SOLO y Subcategorías	Descripción de respuestas típicas
Preestructural	
P1	Respuestas no relacionada con la situación o con errores conceptuales.
P2	Utiliza elementos de combinatoria pero de forma incorrecta.
Multiestructural	
M1	Utiliza la regla de la multiplicación, pero no considera las combinaciones posibles.
Relacional	
R1	Combinatoria, regla de Laplace, técnica de conteo.
R2	Formula binomial pero no identifica la distribución, no definición de variable aleatoria

Se presentan en la Tabla 5 ejemplos de respuestas para cada uno de los niveles observados en la Tabla 4.

Tabla 5. Ejemplos de respuestas para la pregunta 11.

Subcategorías	Respuesta	Descripción
P1		Respuesta no relacionada con la situación.

## Propuestas para la enseñanza de la matemática

P2		Utiliza elementos de combinatoria, exhibiendo un conocimiento pertinente pero de forma incorrecta.
M1		Aplica la regla del producto considerando las probabilidades de obtener 2 éxitos y 1 fracaso, pero no toma en cuenta las posibles combinaciones.
R1		Aplica la regla del producto considerando las probabilidades de obtener 2 éxitos y 1 fracaso. Determina mediante representaciones las combinaciones posibles y multiplica este valor por el resultado anterior.
R2		Utiliza la fórmula binomial, pero no se evidencia definición de la variable aleatoria del problema, ni la identificación de los parámetros de la distribución, tampoco se observa uso formal de notación de probabilidad.

A continuación se presentan la tabla de frecuencias para las respuestas observadas en el estudio para cada nivel descrito en la Tabla 4.

Tabla 6. Frecuencia y porcentaje de respuestas por nivel de razonamiento

		Profesores (n=27)	
		Frec.	%
Preestructural	P1: Respuestas incorrectas	3	11,11%
	P2: Utiliza elementos de combinatoria, exhibiendo un conocimiento pertinente pero de forma incorrecta	6	22,22%
Multiestructural	M1: Utiliza la regla de la multiplicación, pero no considera las combinaciones posibles.	6	22,22%



Relacional	R1: Utiliza combinatoria, la regla de Laplace o técnicas de conteo para determinar la probabilidad.	7	25,93%
	R2: Utiliza la fórmula Binomial pero, no identifica la distribución, no define variable aleatoria ni utiliza notación de probabilidad.	5	18,52%

## Conclusiones

El desempeño en la resolución de problemas binomiales está basado en una serie de conceptos los cuales definieron las jerarquías mencionadas durante el análisis. La definición clásica de probabilidad, el uso de diagrama de árbol, la regla multiplicativa, la fórmula de combinatoria y el conocimiento de la fórmula binomial son elementos de transición entre niveles. Respecto al problema binomial equiprobable se observó que la mayoría de los docentes (51,85%) recurre al diagrama de árbol para su solución, determinando del mismo la probabilidad pedida (no se observa asignación de probabilidades en el diagrama, ni uso de regla multiplicativa u otro concepto de cálculo de probabilidad), en cambio, en el problema binomial no equiprobable en ningún caso se intentó solucionar el problema de esta forma, sino que, siempre se intentó encontrar la solución mediante métodos de conteo o combinatorial para determinarlo. Consecuencia de esto es que no se observe el nivel multiestructural en el primer caso, ni el uniestructural en el segundo. Finalmente, no se observa uso de lenguaje formal en la resolución de los problemas, no hay definición de eventos ni notación algebraica para los cálculos, si bien se usa la fórmula binomial ésta no se enuncia ni se define la variable aleatoria correspondiente, menos se identifican los parámetros de ésta.

## Referencias bibliográficas

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability? En G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, pp. 241-266. New York: Springer.

Biggs, J. y Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy*. Capítulo 2, pp. 17-31. New York: Academic Press Inc.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. y Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (1), 96-105.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3). Disponible en: <http://www.revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842>.

Landín, P. R. (2013). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de



bachillerato sobre problemas binomiales. En J.M. Contreras, G. R. Cañadas, M.M. Gea y P. Arteaga (Eds), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 425-431). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Mayén, S., Salazar, A. y Sánchez, E. (2013). Niveles de razonamiento frente a problemas binomiales. En J.M. Contreras, G. R. Cañadas, M.M. Gea y P. Arteaga (Eds), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 409-416). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

MINEDUC (2013). *Instrumentos curriculares para implementación 2016: Bases Curriculares 7° básico a 2° medio, Bases Curriculares Técnico Profesional y Programas de Estudio*. Ministerio de Educación, Chile.  
[http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013\\_recurso\\_17\\_09.pdf](http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-30013_recurso_17_09.pdf)

Sánchez, E. y Landín, P. (2011). Fiabilidad de una jerarquía para evaluar el razonamiento probabilístico acerca de la distribución binomial. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, Ciudad Real, España.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53 (2), 113-138.